Pure Mathematics **理论数学, 2024, 14(11), 36-43**
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.1411372

Hans汉斯

关于“把握数学本质”的几点思考

崔静静

西昌学院理学院，四川 西昌

收稿日期：2024年9月29日；录用日期：2024年10月26日；发布日期：2024年11月14日

摘 要

把握数学的本质是学生发展数学学科核心素养的重要支撑，对于发挥学科育人价值具有重要指导意义。把握数学的本质需要教师从以下五个方面进行思考：深入晓悟数学知识之背景、深入领悟数学学科大概念、深远启悟数学之理性精神、深刻感悟数学之思想方法、深切赏悟数学之美，深度“悟”懂数学内容的本质。

关键词

数学本质，学科大概念，理性精神，数学思想方法，数学之美

Some Cogitation about “Grasping the Essence of Mathematics”

Jingjing Cui

School of Science, Xichang University, Xichang Sichuan

Received: Sep. 29th, 2024; accepted: Oct. 26th, 2024; published: Nov. 14th, 2024

Abstract

Grasping the essence of mathematics is an important support for students to develop the core quality of mathematics discipline, and has important guiding significance for giving full play to the value of discipline education. Grasping the essence of mathematics requires teachers to think from the following five aspects: deeply understand the background of mathematical knowledge, deeply comprehend the big concept of mathematics discipline, deeply apprehend the rational spirit of mathematics, deeply grasp the thought and method of mathematics, deeply appreciate the beauty of mathematics, to deeply “understanding” the nature of mathematical content.

Keywords

Mathematical Essence, Big Concept of Discipline, Rational Spirit, Mathematical Thought Method,

文章引用: 崔静静. 关于“把握数学本质”的几点思考[J]. 理论数学, 2024, 14(11): 36-43.
DOI: 10.12677/pm.2024.1411372

The Beauty of Mathematics

1. 引言

《普通高中数学课程标准(2017年版)解读》在“基本理念”中强调：“基于核心素养的教学，就是要让学生在掌握知识与技能的同时理解知识的本质。”在“教学建议”中指出：理想的数学教学过程，应当“把握数学的本……理解数学的本质。”在“学业评价”中指出：学生能够选择一个更能够体现数学本质的、适用范围更广的方法。同时，在正文部分“本质”一词共出现了43次，被广泛地分布在课程标准的各部分，涉及“问题的本质”“事物的本质”等[1]。这一明显变化恰恰也说明了以“核心素养为目标”的教育理念，对“数学本质”的强调。那么，准确理解和把握数学的本质理应引起广大数学教师和研究者的关注，这对于教师树立正确的数学教育观念、促进数学课程改革具有巨大的现实指导意义。

本质指事物本身所固有的根本属性，是某类事物区别于其他事物的内在规定性，它决定了该类事物的性质、面貌和发展。数学本质是数学内容区别于其他学科所具有的基本特质，是数学内容固有的根本属性。把握数学内容的本质，是数学教育领域内一直热议的话题，也是发展学生数学学科核心素养的重要支撑。为何要实施突出数学本质的教学？“使学生在各级各类考试中获得高分、锻炼学生的逻辑思维能力”，这样的回答显得过于功利和苍白。笔者在前期发表的《数学本质：何谓、为何与何为》一文中，从学科育人的需要、课程改革的需要、科学与学科发展的需要三方面进行了详尽的阐述。而本文将致力于全面地回答如下问题：如何实施突出数学本质的教学？石志群认为把握数学本质，应着重分析蕴含在“问题的解决”与“知识形成”过程中的数学思想和数学精神[2]。徐德同从厘清数学知识的来龙去脉、剖析概念内涵、理解数学思想方法、渗透理性精神等六方面，阐述了他对数学教学应如何把握数学本质的几点思考[3]。张奠宙认为数学本质表现为“数学知识间的逻辑关联，数学思想方法的提炼、数学精神的认识等方面”[4]。数学的本质常常隐藏于数学现象(问题、情境、知识等)内部，我们很难直观地去认识，必须要透过现象才能把握其本质。究竟要从哪些视角“把握数学的本质”，下面谈几点思考。

2. 深入晓悟数学知识之背景

把握数学本质的教学建立在追求“有根源”的基础之上，数学史的融入恰好能帮助我们很好理解数学知识“从哪里来、到哪里去”的问题。汪晓勤教授从教师和学生视角，对数学史融入数学教学的作用进行了系统阐述。回溯人类发展史，可以看出数学是人类文化的重要组成部分，数学史与数学文化乃至人类文化都有着密切联系。除了梳理数学思想发展史外，还应引导学生尝试解决数学史中经典的问题(如三等分角、哥尼斯堡七桥问题等)；了解数学历史故事(如希尔伯特旅馆、罗素悖论、笛卡尔创立解析几何的梦境等)，激发学生尝试像数学家一样思考，体验数学家思维的过程。这些重要的史料所蕴含文化价值，是人为编制的思维训练题无法比拟的。这些数学史料可以作为章引言、课后拓展阅读材料呈现给学生，也可以作为背景性问题来引入课题。

究竟要从哪些方面引导学生晓悟数学知识产生的背景？莱布尼兹认为“了解数学史上的重大发现，尤其是那些绝非偶然，经过数学家们深思熟虑后得到的重大发现之真正起源，是大有裨益的[5]”。尤其是重要的数学思想发展史，理应成为数学教学的重要内容。理清了数学思想的前世今生，才能从整体上

较为深刻地认识数学发展的规律，揭示知识自然发生的本质。如在讲“对数的概念及运算”时，学生很容易接受把以 10 为底的对数称为“常用对数”，但对于把 e 为底的对数称为“自然对数”会感觉十分唐突了。一个很自然的问题就是为什么会把以 e 为底的对数称为“自然对数”？这里面有着什么样的历史背景？所以很有必要带领学生探究 e 的来龙去脉。在数学史上，数学家雅可布 • 贝努利首次给出了 e 的定义，1683 年他在研究复利时，证明了当 n 趋近于无穷时，数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的极限介于 2 与 3 之间。因为 e 来源于复利增长，而复利增长又是自然界生物衍生不息的数学模型，并且在后期的实践中还发现以 e 为底数做计算是最简单的。因此，取 e 为自然常数、把 e 为底的对数称为“自然对数”，是科学家们认识自然、探索自然的价值自然导向。相信通过这样的背景介绍，学生对于为什么要把 e 为底的对数称为“自然对数”的理解就非常容易了。

《礼记 • 学记》强调了教师教育的智慧在于“道而弗迁，强而弗异，开而弗达”。引导学生了解数学知识产生的背景，明晰知识的来龙去脉，往往更能够激发学生自主学习的志趣。我们所学的数学知识通常基于一定的现实和理论背景，常见于自然、社会中的问题。如微积分的产生主要源于 17 世纪的科学需求，在当时由于物理学的发展，科学家们需要一种精确描述物体变化率(微分)和累加量(积分)的数学工具，因此微积分便应运而生。再如古希腊数学家喜帕恰斯为了测量天球上的角度和距离，满足测量技术的需求，制作了“和弦表”，自此便诞生了三角函数。

忽视数学知识产生的背景，犹如“无源之水，无本之木”。深入晓悟数学知识之背景，是对知识本源性问题的挖掘，能够帮助学生加强对学习内容的本质把握。如，极限思想是极为重要的一种数学思想，它可以追溯到 2500 多年前古希腊人所提出的“穷竭法”。在我国，较早使用极限思想的是魏晋时期的数学家刘徽，在他所创立的“割圆术”中就体现了极限思想，“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失”正是一种建立在几何体中的极限思想。到了 16 世纪，由于当时科学技术的发展，很多问题已经无法用初等数学的知识加以解决了，因此数学的研究必须突破常量的传统范围，必须创造新的工具用以描述运动变化过程，这就是促进极限思想发展、创立微积分的社会背景。实际上，微积分的正式创立经历了一个漫长的历史进程，在教学中介绍它的发展史，课后让学生查阅资料撰写小论文，不仅能深化学生对微积分“是什么”“可以干什么”“怎样产生的”的本质理解，同时也可以让学生从厚重的发展史中感受到数学的文化价值。

3. 深入领悟数学学科大概念

深入感悟数学学科大概念，先要从大概念的起源、内涵、表现形式谈起。大概念的起源最早可以追溯到美国实用主义教育家杜威在 1902 年提出的教师应“心理化”学科知识之观点。杜威认为每一门学科均应划分为逻辑层面和心理层面，其中逻辑层面代表了知识本身；心理层面则包含了学习者的兴趣和经验等要素[6]。布鲁纳综合了杜威的以上观点，但不同的是，1960 年他在《教育过程》中强调了学科“结构”[7]。期间及此后的很长一段时间内，还有很多诸如怀特海、施瓦布、舒尔曼等教育家都提到过大概念。关于大概念的起源，尽管存在一定的分歧，但人们还是更倾向于杜威、布鲁纳的观点。

大概念的内涵即回答“大概念是什么”。Wiggins 认为大概念是一个概念、问题或主题[8]。Christina 认为大概念是一种关键想法[9]。刘微将大概念定义为反映专家思维方式的概念、论题或观念[10]。李卫东认为大概念代表了概括性知识、基本原理、思维方式[11]。从对国内外学者关于大概念定义的梳理，可以看出国内外学者对于大概念的认识尚未达成一致，但大致可以分为两类：一是可以将大概念归为客观知识(概念、原理等)，这恰好与布鲁纳提出的学科“结构”相对应；二是可以将大概念归为思维方式(观念、想法等)，这与杜威倡导的学科“心理化”相对应。综上可以看出对大概念的内涵界定，既要考虑到客观

知识本身，还应考虑学习者的心理过程。那么大概念就可以被认为是在一个特定领域内由一般的或具体的概念(知识)，概括出高度抽象、涵盖范围广泛的概念。

大概念主要有三种表现形式：概念、观念和论题[12]。概念是对一类事物本质特征的抽象概括，它是大概念最为典型的一种表现形式。如函数这一概念就是对现实世界运动变化规律和数量关系的一种抽象。观念通常表现为一种看法和观点，反映了概念与概念之间的关系。像数学中的命题、法则、定理等都是观念形式的表现，如“能量守恒”“数列是一种特殊的函数”观念。论题代表了一种很难给出确切答案的大概念，常见于人文艺术领域，如“什么是美”，对于这样的问题我们很难回答，也没有固定答案，但确实又能引发思考。

那么，对于数学学科大概念的把握，就应指向更为具体的、能够揭示学科本质的核心概念或思想。数学学科大概念代表了数学学科领域内最有价值的知识，最具统摄性的学科知识，这些概念有着深远的学科价值和广泛应用性。如集合、函数、数列、不等式等是高中数学常见的大概念。那么，这些数学学科大概念是如何提取的？邓靖武认为可以从以下三个视角进行提取：一是基于数学学科视角，从聚焦学科本质出发，提炼学科大概念。二是基于课程标准，综合教材提取学科大概念。三是根据学生的发展需求，通过构建学科大概念统领下的单元知识结构图，确定学科大概念[13]。

引导学生深入感悟数学学科大概念，能实现教学内容少而精，有助于学生的精细化学习，从而促成个体从接受知识向发展核心素养转化。下面以数列章节复习课为例，从深入理解学科大概念的视角，谈谈如何把握数学的本质。在数列的单元复习课中，教师应基于数列大概念，站在“数列是一种特殊的函数”高度，从函数的角度梳理相关内容，具体可通过以下问题促进学生全面理解。

问题 1 数列是在什么样的背景下产生的？(解决实际问题所需)

问题 2 数列的本质是什么？(一种离散的函数)

问题 3 数列学习的核心问题是什么？(研究数列的规律和数列的求和)

问题 4 研究数列的顺序是什么？(从一般数列到特殊数列)

问题 5 数列的产生给生活带来了什么改变？(给生活带来了方便，解决了大量的经济类问题，如计算银行的按揭贷款问题)

以上系列问题是“数列”大概念教学设计的逻辑起点，目的是让学生深入感悟研究数列是为了解决实际生产生活中的问题所需。理解数列是一种特殊的函数。类比函数的研究思路，梳理出数列学习也遵从由一般数列到特殊数列(等差数列、等比数列)构建的总体研究思路。探究数列(通项)的规律和数列的求和是数列大概念学习的核心问题。在数列的单元复习课中，教师应聚焦于“数列是什么”的本质来构建真实的问题情境，将所学知识织成一张网。通过此“情境－问题－概念(本质)－命题(关系)－结构(联系)－应用”的知识再生成过程，构建数列单元复习的思维导图[14]。

4. 深远启悟数学之理性精神

徐德同认为在数学教学中持续渗透理性精神是把握数学本质的永恒追求，数学教育应重视对学生理性思维的培育[3]。教师在讲授数学问题时，不仅仅要着眼于把知识、方法和策略传授给学生，更应该从育人的角度出发，让学生保持探究自然规律的好奇心，启发、锤炼他们的理性思维。张乃达先生曾说过：“理性精神是一种信念，是一种对真理的执着追求。它反对人类的愚昧与迷信，相信自然规律是可以被认识的，并且认为每个人都具有认识世界的能力与天赋”。在数学发展史上，出现过很多对理性探索的数学活动，而这些对理性精神追求的数学活动，另一方面也促使数学学科不断地向前发展。

从揭示数学本质的视角来看，数学研究的出发点和归宿都是现实世界[15]。数学精神务必是基于现实世界的实践活动，并能改造现实世界、高度组织概括、集中于意识活动的，最能体现数学和数学教育的

成果。那么，究竟什么才能担起数学之精神，符合数学精神之要求呢？大栗博司教授认为理性的精神是数学的本质。克莱因把数学看成“一种理性精神”。齐友民先生认为“彻底的理性探索精神”是数学精神的集中体现。徐利治先生更是从民族与世界的角度指出了“一个民族若想站在世界之林，决不能没有理性思维，而理性思维的最佳方式就是数学”。

克莱因对数学的理性精神进行了阐述：数学是一种理性精神的代表，这种精神使得人类思维运用到最完善的程度；试图影响着人类的物质、道德和社会生活[16]。从数学教育内在价值来看，相比于其他学科，数学是“理性思维”的最佳诠释。进一步讲，数学对人的思维培养，所起作用是最直接、有效的。从个人发展来看，理性精神也是个体形成必备品格、关键能力的核心要素。可见这种理性精神恰好与数学学科核心素养的本质内涵完美契合。举个简单的例子，教师在对无理数 π 进行教学时，不仅要让学生清楚 π 是一个无限不循环小数，更要让他们对这个无理数获得更高的认识：π 代表了圆的周长与直径的比值。即对于任何一个圆来说，它的周长与直径的比值都是一个常数。圆有千千万万个，它们所对应的周长与半径也各不相同，但千变万化中却蕴含了不变性，这就是数学理性思维的完美呈现。

姜伯驹教授说过：“中学阶段的数学学习，应让学生接受理性精神的洗礼，让其感受到逻辑与理智的力量，这将使学生受益终身”。实际上，很多学过数学甚至经受过严格数学训练的人，在他们的一生中很少用到其所学的数学知识，但这并不能说明他们的学习没有效用。很有可能数学的理性精神、思维方式却在随时随地地起作用，使他们终身受益。理性精神是数学的灵魂伴侣，它能够潜移默化地使个体成为理性的主体，追求世界万物之“理”。从而实现使个体的理性思维逐步全面发展，以更加理性思维去认识、改造客观世界；理解和控制自然；推动人类的进步与发展。

5. 深刻感悟数学之思想方法

要让学生成长为能够开出思维之花，结出智慧之果的参天大树，除了引导其深入晓悟数学知识产生的背景外，还需要给他们灌以数学的“理性精神”“思想方法”之养分。深刻体悟数学之思想方法，首先需要明确什么是思想？思想是一种主观意识体系，是对客观事物的认识体系和理解形式。具体地讲，思想即个体在其意识中反映、掌握客观事物，创造脱离实物的观念体系。那么，自然地就有这样一个问题产生了：思想和精神的联系是什么？精神需要依靠具体的行为实现，是无数行为的体现，是个体意识活动高度概括后形成的思想成果。思想与精神的关系可以用花蕾与果实的关系来进行比喻，将思想比喻为花蕾，那么精神就是其果实。有什么样的思想之花，就会结出什么样的精神之果。

究竟什么才是涵养理性精神的数学思想？关于这个问题的阐述，莫里斯•克莱因在《古今数学思想》给出了一个让学者们比较满意的答案——数学发展史上的重大成就及数学家们思想成果。史宁中教授认为数学思想应该满足两个条件：一是数学产生和发展过程中，所必须依赖的那些思想；二是相比于未经受过系统数学学习的人，那些经历了系统数学学习的人身上所特有的思维特征[17]。日本数学家米山国藏说过学生在学校里学习的数学知识，毕业之后若没有什么机会使用，一两年后很快就会忘掉。但不论他们从事任何工作，铭刻在他们大脑中的数学思维方法、数学的精神、看问题的着眼点和积累的数学智慧等，却随时随地发生作用，使他们受益终身[18]。

然而很多时候，我们会将“数学思想方法”放在一起谈。那么数学思想等同于数学方法吗？刘加霞认为数学思想与数学方法二者并不是一回事，“数学思想方法”是有层次之分的。某种数学的方法未必是一种数学思想，反之，某种数学思想必然是一种有效的数学方法。只有具备以下特征——能够突出数学本质、人类思维本质；具备广泛应用性；意义深远的数学方法才能被称为数学思想[19]。

其实，对于数学学科来说，数学的思想往往又是学科本质的集中体现，是教师进行教学设计的切入点和落脚点，同时也是促进学生将书本知识转入大脑的“养分”，是涵养必备品格和理性精神的重要载

体。那么，数学的核心思想有哪些？一个比较广泛认可的观点是“抽象、推理和模型”，其中抽象是最为核心的思想。回溯数学历史发展的历程，数学概念和法则的获得，大多都是数学家们在现实生活通过抽象后得到的。抽象指从众多事物中抽取出共同的、本质性的特征，而舍弃其非本质特征的过程。任何事物都有其现象和本质，抽象的意义就在于让人们透过现象看本质。反映在数学教学上，举个简单的例子，如“数列是一种特殊的函数”。进一步讲，那数列是否具备函数所具有的单调性、周期性等性质？

推理是思维的重要形式之一，指由一个或多个已知判断(条件)推出新判断(结论)的过程。数学是一门思维的学科，数学推理主要包括演绎推理和归纳推理。探索数学命题之间的关系，往往离不开推理。如当学生学习等差数列后，引导他们将等差数列的通项公式与一次函数作比较，同理，用其求和公式与二次函数相比较，思考问题：二者有什么关系？差异在哪里？产生差异的原因是什么？《普通高中数学课程标准(2017 年版)》明确了逻辑推理素养的育人价值：“能够在比较复杂的情境中把握事物间的关联，探索事物发展的脉络，形成合乎逻辑的思维品质和理性精神”。上述系列问题的分析不仅让学生明晰了数列与函数二者间的关联，还深化了学生对函数的认识与理解，让学生能够看透数列的本质属性。

模型思想是一种运用数学建模去解决数学内外问题的思想。它将所要研究的实际问题转化为数学问题，然后构造出其数学模型，通过对数学模型的研究，使原来的实际问题得到解决。模型思想不仅是重要的数学思想之一，同时也是培养学生实际问题解决的能力、提升数学核心素养的重要途径。把握模型思想的最终指向，即把握现实世界中某一类事物的本质与规律。教师在引导学生进行数学建模的过程中，要把非本质的、对反映客观真实影响程度较小的因素去掉，重点抓本质的，这样才能使建模所得结果与原型具备高度相似性。综上，深刻体悟“抽象、推理、模型”三个重要数学思想，对于学生分析事物的本质、问题的本质、数学的本质是至关重要的。

6. 深切赏悟数学之美

青少年在学习的过程中，往往对数学不感兴趣。有的认为数学不仅抽象难懂，还一点儿也不实用；有的认为数学枯燥乏味，没多大意思；还有不少一提到数学，就连连摆手，甚至把数学视为了他们的“噩梦”。听数学课、解数学题目，是不少青少年学习者认为最头疼的事情。徐利治先生认为产生以上情况的原因，与教师忽视了“贯彻数学教学中的审美原则”息息相关[20]。如何让学生摆脱“苦学”的束缚，走进“乐学”的园地？这就需要教师带领学生深切赏悟数学之美，充分挖掘数学美的内涵，提升各自对数学美的领悟力和鉴赏力。

在阐述数学美之前，很有必要先来认识一下美的根源。马克思认为人类社会生产生活往往是按照“美学秩序”进行的。个体美感的形成，依赖于他们长期所从事的生产劳动实践，取决于个体的训练、修养和文化传统。从猿类进化为人类的研究表明，人类在几十万年里制造和使用工具，从事劳动生产的实践过程中，各种自然规律、秩序、对称、和谐、比例、节奏、韵律等，与审美主体心理结构融合，就构成了美的根源。从出土的新石器时代陶器可以看出，当时的人已经具备了三角形、圆、圆柱、圆台、球、垂直、平行等几何观念。他们所设计与创作的编织物和陶器，展现出了对称性、和谐性和相似性的追求，实际上，这些做法恰恰表明了当时人们对空间关系的一种关心，意味着数学审美意识的萌芽。

数学知识作为精神的生产物，自然也应符合“美学秩序”。所谓的数学美又有什么独特之处呢？数学在内容结构、方法上具有自身的美，就构成了数学美的独特之处。具体来讲，数学美的本质就是数学内在结构的方法与审美主体的意向斗争、融合，最后共存，从而构成了数学美的本质。那么，要深切赏悟数学之美，前提是要深度剖析数学美的特点。徐利治认为数学美具有和谐性与奇异性的特点。史宁中认为数学美的本质属性，无非就是和谐、简洁、对称与周期[21]。关于数学美的分类，当下比较主流的观点是和谐美(统一美)、简洁美、对称美、奇异美。

所谓的统一性，就是要部分与部分、整体与部分之间的协调统一。马克思主义基本哲学基本原理认为，客观世界具有统一性。那么，数学作为一门描述客观世界规律和现象的科学，必然也具有统一性。因而和谐美(统一美)往往成为数学家们追求的目标。如，由法国数学家组成的布尔巴基学派，利用数学结构实现了数学的统一。美国数学家麦克莱恩通过范畴论的抽象化方法，使得代数学家们能够更加深入地理解代数结构之间的联系，从而推动了数学的统一和发展。高斯曾把寻找“数学内部的本质联系”、主张“不同理论之间的奇妙结合”作为数学研究的一个目标。克莱因曾将“统一数学”“统一数学与其它学科”视为研究的重任。强调数学统一性的观念，实际上就是要寻找数学内部的本质联系。反映到数学教学中来，如果教师没能引导学生“赏悟”到数学内部的有机联系，那么即便解再多的题目，数学知识难免也会被分割为孤立的细枝末节。

与和谐美(统一美)联系最为紧密的就是简洁美了。客观世界不仅具有统一性，通常还统于一个简洁的规律。美国数学家伯克霍夫曾给出了一个关于美的度量表达式：$M=\frac{O}{C}$，其中 C 代表复杂程式，O 代表秩序。换句话说，越简单就越美。在繁杂的世界中，数学家总是尽可能地用最简洁、基本的数学语言去描述和解释客观规律，试图给人一种美的感受。如苏格兰数学家纳皮尔在研究天文学的过程中，为了简化计算从而发明了对数。18 世纪法国数学家拉普拉斯，评价了“对数的发明，用缩短计算时间，延长了天文学家的寿命”。进一步讲，指数的本质是乘法，对数的本质是除法。乘法的本质又是加法的简便运算，而除法又可以被视作乘法的逆运算。这样的统一直接将小学所学的加、减、乘、除四则运算，与高中所学的指数、对数、幂运算有机融合在一起，既简洁又统一，让我们看清了其中的关系本质。

数学家哈瑞认为数学美并非独立存在的，他将数学美定义为“二阶物”。相对于客观世界的美而言，数学之美是第二性的，是一种意识形态之感官。对称现象在生活中普遍存在，对称通常给人一种平衡、和谐的感觉。在几何图形中，常见的有轴对称、中心对称和镜对称，其中圆、球因具有转动的对称性，被认为是最美的几何图形。在数学发展史上，有过不少数学家出于对对称美的追求，创造了新的数学理论。数学王子高斯在 19 岁时，利用正十七边形隐含的代数对称性，说明了可以用直尺和圆规给出正十七边形的画法。再如加法的逆运算是减法，乘法与除法也互为逆运算，微分的逆运算是积分等等，这些逆运算不仅具备统一美，还与对称美紧密联系。

培根说过：“任何一个极美的东西都是在和谐中包含着某种奇异”。奇异性包含了两方面，一是奇妙，二是变异。在数学发展史上，时常会出现统一各部分的新思想、新观点、新理论，同时也会产生无法包括在其中的奇异对象。这就是变异，变异往往有悖于人们的期望与想象，因此也得到了更多的关注与好奇。如在古希腊时期，有理数一度被认为是能够解释和统一整个宇宙的数字，直到希伯索斯发现了单位正方形的对角线长度不是有理数时，这一有悖于“万物皆数(指有理数)”的新发现，直接动摇了毕达哥拉斯学派在学术界的统治地位，从而致使希伯索斯流亡他乡。但真理是无法被掩盖的，后来这一“变异”现象在数学家们共同的证明下，建立了实数系。

7. 结语

综上，把握数学的本质可以从晓悟数学知识之背景、领悟数学学科大概念、启悟数学之理性精神等五方面进行分析。探讨突出数学本质的教学策略是一个值得广大数学教师持续研究的课题，文中关于如何把握数学本质的论述还很不全面，需要更多的数学教育者继续深挖和探索。同时，我们还应该意识到，关注数学本质、强调数学教育“学科性”的同时，还应注意到数学及数学教育价值中的“教育性”，只有妥善处理好“学科性”与“教育性”二者间的关系，使其和谐共生，才能真正地助力学生数学素养的良好发展。在突出数学本质的实践教学中，存在如下问题与挑战：一是基于知识本质的教学实践明显不足，

在当前的数学课堂教学中“知识点覆盖”“题海战术”“为活动而活动”的浅层次教学现象依然盛行；二是不少数学教师对学科及其本体知识的认识不够深入，即对数学的价值和功能认识不足，对数学知识本质的思考明显欠缺。同时，在实践中，还应考虑到数学素养、数学教学、数学知识的整体性与一致性，兼顾小学、中学甚至大学数学学习的阶段性与差异性。

基金项目

本文系四川省哲学社会科学重点研究基地彝族文化研究中心资助项目(YZWH2324)的系列研究成果；西昌学院学科攀登计划－层次资助项目(015/117620086)的系列研究成果；凉山州中学数学应用意识培养情况研究的系列研究成果(项目编号：13SQS21)。

参考文献

[1] 崔静静, 柴文斌, 赵思林. 突出数学本质的教学策略[J]. 教育研究与评论, 2022(9): 60-64.

[2] 石志群. 数学教学如何突出数学本质[J]. 数学通报, 2019, 58(6): 23-26.

[3] 徐德同. 关于“理解数学把握本质”的几点思考[J]. 数学通报, 2022, 61(3): 37-40.

[4] 张奠宙. 教育数学是具有教育形态的数学[J]. 数学教育学报, 2005(3): 1-4.

[5] 李文林. 数学珍宝——历史文献精选[M]. 北京: 科学出版社, 1998: 214-221.

[6] John, D. (1902) The Child and the Curriculum. University of Chicago Press.

[7] Bruner, J.S. (1960) The Process of Education. Harvard University Press, 52-67.

[8] 威金斯, 麦克泰格. 追求理解的教学设计[M]. 闫寒冰, 宋雪莲, 赖平, 等, 译. 上海: 华东师范大学出版社, 2017: 3.

[9] Chalmers, C., Carter, M., Cooper, T. and Nason, R. (2017) Implementing “Big Ideas” to Advance the Teaching and Learning of Science, Technology, Engineering, and Mathematics (Stem). *International Journal of Science and Mathematics Education*, **15**, 25-43. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9799-1

[10] 刘徽. “大概念”视角下的单元整体教学构型——兼论素养导向的课堂变革[J]. 教育研究, 2020, 41(6): 64-77.

[11] 李卫东. 大概念: 重构语文教学内容的支点[J]. 课程·教材·教法, 2022, 42(7): 96-101+109.

[12] 徐扬. 由概念到实践: “大概念”教学的本质属性及实践路径[J]. 中国教育学刊, 2024(7): 22-27+33.

[13] 大概念统摄下物理单元知识结构构建及教学探讨[J]. 课程·教材·教法, 2021, 41(1): 118-124.

[14] 张刘成. 从学科单元走向学习单元的高中数学实践研究[J]. 中国数学教育, 2021, 60(4): 25-29.

[15] 郑义富. 关于数学精神、数学思想与数学素养的辨析[J]. 课程·教材·教法, 2021, 41(7): 112-118.

[16] 克莱因. 西方文化中的数学[M]. 张祖贵, 译. 北京: 商务印书馆, 2013: 6.

[17] 史宁中. 漫谈数学的基本思想[J]. 数学教育学报, 2011, 20(4): 8.

[18] 米山国藏. 数学的精神、思想和方法[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2019: 8.

[19] 刘加霞. 小学数学教学中基本数学思想的类别与内涵[J]. 课程·教材·教法, 2015(9): 49-53.

[20] 徐利治. 数学美与数学教学中的审美[J]. 山东教育, 1997(11): 30-35.

[21] 史宁中. 美与数学(上) [J]. 中学数学教学参考, 2023(4): 2-6.